Un homéomorphisme induit par l'exponentielle

Lemme 1. *Pour tout $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $||M||_2 = \rho(M)$.*

Démonstration.

Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, qui sont strictement positives.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux λ_i.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, avec $||x||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, alors :

$$||Mx||_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i M e_i \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=0}^{n} x_i \lambda_i e_i || \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i^2 \leqslant \rho(M)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(M)^2$$

De plus, si $x = e_{i_0}$, où i_0 est tel que $\lambda_{i_0} = \rho(M)$, on a $||Mx||_2^2 = \rho(M)^2$.
Ceci donne $||M||_2 = \rho(M)$, d'où le lemme.

□

Théorème 2. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration.

Étape 1 : Montrons que l'application est bien définie, et continue.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors S est diagonalisable, et on peut écrire :

$$S = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}P \text{ avec } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ les valeurs propres de } S$$

On a alors :

$$\exp(S) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}P$$

De plus, pour tout i, on a $e^{\lambda_i} > 0$, donc $\exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
L'application considérée est donc bien définie, et continue comme restriction d'une application continue.

Étape 2 : Montrons que l'application est surjective.
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors B est diagonalisable, et on peut écrire :

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}P \text{ avec } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ les valeurs propres de } B$$

On a alors :

$$B = \exp(A) \text{ avec } A = P \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}P \in S_n(\mathbb{R})$$

D'où la surjectivité.

Étape 3 : Montrons que l'application est injective.
Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(A')$.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de A'.
Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout i.
On fixe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^{\mathrm{t}}P$. Alors A' commute avec $Q(\exp(A')) = Q(\exp(A))$, or :

$$Q(\exp(A)) = Q(P\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\,{}^{\mathrm{t}}P) = PQ(\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}))\,{}^{\mathrm{t}}P = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^{\mathrm{t}}P = A$$

Ainsi, A et A' commutent, et par diagonalisation simultanée, on a :

$$A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^{\mathrm{t}}P \Rightarrow \exp(A) = P\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\,{}^{\mathrm{t}}P$$

$$A' = P\,\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)\,{}^{\mathrm{t}}P \Rightarrow \exp(A') = P\,\mathrm{Diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})\,{}^{\mathrm{t}}P$$

Donc, pour tout i, on a $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$, puis $\lambda_i = \mu_i$, d'où $A = A'$.

Étape 4 : Montrons que l'application est bicontinue.
Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B = \exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrons que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A.
La suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée pour $\|.\|_2$.
Par le lemme, on a $\|B_p\|_2 = \rho(B_p)$, donc tous les spectres des B_p sont majorés par une constante C.
Par le même raisonnement appliqué à $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$, qui converge vers B^{-1} par continuité de l'inverse, les spectres des B_p sont minorés par une constante C'.
Toutes les valeurs propres des B_p sont donc dans le compact $K = [C, C'] \subset]0, +\infty[$, donc toutes les valeurs propres des A_p sont dans le compact $[\ln C', \ln C]$.
La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée pour $\|.\|_2$, et sa seule valeur d'adhérence est A.
En effet, si $(A_{p_k})_{p\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\overline{A}$.
On a alors $\exp(\overline{A}) = \lim\limits_{k\to\infty} \exp(A_{p_k}) = B = \exp(A)$, donc $\overline{A} = A$ par injectivité.
La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée et ayant une unique valeur d'adhérence A, elle converge vers A.
On a donc montré la bicontinuité de $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$.

□

Corollaire 3. $GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Démonstration.

La décomposition polaire nous donne :

$$GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(R) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \cong O_n(R) \times S_n(\mathbb{R}) \cong O_n(R) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

□

Conclusion. $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont homéomorphes, grâce à l'exponentielle. $\triangleleft$

Références

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet, 2013